Title	Sharp予想の特別な場合(局所環のコホモロジーに関連する研究)
Author(s)	青山, 陽一; 後藤, 四郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 543: 13-52
Issue Date	1985-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/98791
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
543巻 1985年 13-52

Sharp予想の特別な場合

愛媛大・理　　青山　陽一 (Yoichi Aoyama)
日大・文理　　後藤　四郎 (Shiro Goto)

Dualizing Complexの存在についてのSharp予想に関して考察することにする。

まずdualizing complexに関して簡単に復習しておこう。dualizing complexの概念は[13]によるのであるが，ここではSharp氏の論文に従って述べていくことにする。なお環と言えば断わらない限り可換ネーター環 $\ni 1 \neq 0$ であるものとする。

Definition ([16, (2.4)]. cf. [13, V. §2]). Rを環とする。R-加群の複体 $I^{\cdot} = \cdots \to I^{i-1} \to I^{i} \to I^{i+1} \to \cdots$ は次の条件を満たすときRのdualizing complexであると言う：

(D1)　$I^{\cdot}$ bounded

(D2)　$H^{i}(I^{\cdot})$ 有限生成 for $\forall i$

(D3)　I^{i} injective R-module for $\forall i$

(D4)　任意のR-加群の bounded complex $X^\cdot$ s.t. $H^i(X^\cdot)$有限生成 for $\forall i$, に対し, 自然な写像 $\theta(X^\cdot; I^\cdot)^\cdot : X^\cdot \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X^\cdot, I^\cdot), I^\cdot)$ ([16, (2·3)]) が quasi-isomorphism (quism と略す) である。

(D1), (D2), (D3) の下で, (D4) は次の (D4') と同値である:

(D4')　自然な写像 $\alpha(I^\cdot)^\cdot : R \to \mathrm{Hom}_R(I^\cdot, I^\cdot)$ ([16, (2·3)]) が quism である　([16, (3·6)])

dualizing complexが存在すれば, 次の意味で一意的である。

([13, V. §3], [16, (4·6)]). Spec(R) が連結, $I^\cdot, J^\cdot$ を R の dualizing complexとすると, 整数 t, 可逆R-加群 P と quism: $I^\cdot \to J^\cdot[t] \otimes_R P$ (～[ ] は shift functor) が存在する。

R を有限次元の Gorenstein 環, $I^\cdot$ を R の minimal injective resolutionとすれば, $I^\cdot$ は R の dualizing complex である ([16, (3·7)]) が, これは $\bigoplus_i I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} E(R/\mathfrak{p})$ ($E(R/\mathfrak{p})$ は $R/\mathfrak{p}$ の injective envelope) という特別な形をしている。この様なものを fundamental と言う。即ち,

Definition ([18, (1.1)]). $I^\cdot$ が (D1), (D2) と次の (D5) を満たすと

き，fundamental dualizing complexであると言う：

(D5) $\bigoplus_i I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)} E(R/\mathfrak{p})$

(fundamental dualizing complex は dualizing complex である。)

([11, 3.6]). dualizing complex が存在すれば，それの reduction である fundamental dualizing complex が存在する。

dualizing complex が存在するための十分条件として，次はよく知られている。

([13, V. §10], [16, (3·7) and (3·9)], [17, (3·5)], [12, (3·4)]). 有限次元の Gorenstein 環は dualizing complex を持つ。(min. inj. resol. がそう)

$R \to S$ を環準同型で S を有限生成 R-加群とするものとする。このとき R が dualizing complex $I^\cdot$ を持てば，$\mathrm{Hom}_R(S, I^\cdot)$ は S の dualizing complex である。

R が dualizing complex $I^\cdot$ を持てば，$R[X]$ (resp. $R[\![X]\!]$) 上 dualizing complex $J^\cdot$ と quism : $R[X]\otimes_R I^\cdot$ (resp. $R[\![X]\!]\otimes_R I^\cdot$) $\to J^\cdot$ が存在する。

また必要条件として，

([13, V. §10], [17]). R が dualizing complex を持てば，

$\dim R < \infty$.　R は catenary.　formal fibre はすべて Gorenstein. $\mathrm{Gor}(R) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid R_{\mathfrak{p}}$ Gorenstein$\}$ は open. 有限生成 R-algebra は dualizing complex を持つ. 従って R は acceptable.

Faltings と Ogoma によって dualizing complex が存在するための必要十分条件が与えられているが，ここでは省略するので [4] 及び [15] を見て下さい。平坦射による挙動は[12]で研究されている。

さて実際に dualizing complex を持つ環を与えようとすれば，「有限次元で Gorenstein 環の準同型像になっている環は dualizing complex を持つ」によるしか現在のところ方法がない様である。([4], [15] の結果があるが)　そして Cohen-Macaulay 環の場合にはこの様なものに限られる訳である([18, (4.3)])。　そこで Sharp 氏はこの逆を予想した。即ち，

(SC) Sharp 予想 ([18, (4.4)]). 環 R が dualizing complex を持てば，R は Gorenstein 環の準同型像である。

すでに述べたように，Cohen-Macaulay 環に対しては (SC) が正しいことはよく知られている。([18, (4.3)])　Cohen-Macaulay でない場合は今まで殆んど知られていなかった。本稿では局所

環に対し(SC)を考察することにする。局所環と限らない場合次元が2以下なら(SC)が正しいことを小駒氏が証明した。これについては，次の小駒氏の稿を見て下さい。

以後，$(A, \mathfrak{m})$をd次元局所環とする。完備化を^で示す。Aが dualizing complex $D_A^{\cdot}$を持てば，canonical module K_Aを持つ。実際$K_A = H^s(D_A^{\cdot})$，$s = \min\{i \mid H^i(D_A^{\cdot}) \neq 0\}$，で与えられる。[canonical module については [14], [2] を参照) また $H_{\mathfrak{m}}^i(A) \cong \mathrm{Hom}_A(H^{s+d-i}(D_A^{\cdot}), E(A/\mathfrak{m}))$ である。ここで示そうとする結果は次の通りである。

(1.1) $\ell(H_{\mathfrak{m}}^i(A)) < \infty$ for $i \neq d$ のとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である.

(b) A の dualizing complex が存在する.

(c) A の canonical module が存在する.

(1.5) $d = 1$ のとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である.

(b) A の dualizing complex が存在する.

(c) A の canonical module が存在する.

(d) $A \to \hat{A}$ は Gorenstein 射である.

(1.7)　$d=2$のとき，次は同値である：

(a)　A は Gorenstein 環の準同型像である.

(b)　A の dualizing complex が存在する.

(c)　A の canonical module が存在し，$A \to \hat{A}$ が Gorenstein 射である.

(d)　任意の ideal $\mathfrak{a}$ $(\neq A)$ に対し，$A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在する.

(2.1)　(S_2) な局所環に対し (SC) が正しければ，一般の局所環に対し (SC) は正しい。

(2.3)　$d \leqq 4$ のとき，A の dualizing complex が存在すれば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

(3.10)　$d \geqq 5$ のとき，A が (S_{d-2}) で，depth $A \geqq d-1$ かつ depth $K_A \geqq 3$ ならば，A の dualizing complex が存在すれば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

R を環，M を有限生成 R-加群，N をその部分加群，$\dim M < \infty$ とする。$\mathrm{Assh}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) \mid \dim R/\mathfrak{p} = \dim M\}$ とおく。$M \supseteq N = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ を最短準素部分加群分解で，$\dim M/Q_i = \dim M/N$

$\Longleftrightarrow 1 \leqq i \leqq s$ $(1 \leqq s \leqq t)$ なるものとするとき，$U(N) = U_M(N)$ $= Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ とおく（一意的に決まる）。

§1. この節では，A が $\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A)) < \infty$ for $i \neq d$ を満たすとき（*finite local cohomology* であると言う。FLCと略する。），及びそれより簡単に判る $d \leqq 2$ のときを考察する。$U = U_A(0)$ とおく。A が FLC ならば $U = H^0_{\mathfrak{m}}(A)$ である。

(1.1) Theorem. A が FLC であるとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である.

(b) A の *dualizing complex* が存在する.

(c) A の *canonical module* が存在する.

(a) ⇒ (b) ⇒ (c) は一般の局所環に対しよく知られている。(c) ⇒ (b) は一般には成立しない。([15, §6. Example 2], (1.9))

Proof of (c) ⇒ (b). $I^{\cdot}$ を canonical module K_A の *min. inj. resol.* とし，$K^{\cdot} = H^0_{\mathfrak{m}}(I^{\cdot})$，$J^{\cdot} = I^{\cdot}/K^{\cdot}$ とおく。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し，$(K_A)_{\mathfrak{p}} \cong K_{A_{\mathfrak{p}}}$ ([2, 4.3]) で $A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay であるから $J^i \cong \bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=i} E(A/\mathfrak{p})$ for $i < d$，$J^i = 0$ for $i \geqq d$ となる。([14, Satz 6.1])

$d \geqq 2$ のとき。$\mathrm{depth}\, K_A \geqq 2$ だから $K^0 = 0$, $K^1 = 0$ である。complex の完全列 $0 \to K^\cdot \to I^\cdot \to J^\cdot \to 0$ より長完全列 $\cdots \to H^{i-1}(I^\cdot) \to H^{i-1}(J^\cdot) \to H^i(K^\cdot) \to H^i(I^\cdot) \to H^i(J^\cdot) \to H^{i+1}(K^\cdot) \to \cdots$ を得る。$H^0(I^\cdot) = K_A$, $H^i(I^\cdot) = 0$ for $i \neq 0$, $H^i(K^\cdot) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(K_A)$ for $\forall i$, $H^0(K^\cdot) = 0$, $H^1(K^\cdot) = 0$ であるから $H^0(J^\cdot) \cong K_A$, $H^i(J^\cdot) \cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(K_A)$ for $i > 0$ である。[19, (1.5)] より $H^i_{\mathfrak{m}}(K_A)$ 有限生成 for $i \neq d$ であるから, $H^i(J^\cdot)$ 有限生成 for $i < d-1$ である。完全列 $0 \to U \to A \xrightarrow[\text{nat.}]{h} \mathrm{Hom}_A(K_A, K_A) \to \mathrm{Coker}(h) \to 0$ に $\mathrm{Hom}_A(\ , E(A/\mathfrak{m}))$ を作用させて完全列 $0 \to X \to H^d_{\mathfrak{m}}(K_A) \to E(A/\mathfrak{m}) \to Y \to 0$ を得る ($X = \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}(h), E(A/\mathfrak{m}))$, $Y = \mathrm{Hom}_A(U, E(A/\mathfrak{m}))$)。$U$ と $\mathrm{Coker}(h)$ は長さ有限であるから, X と Y もそうである。$J^{d-1} \twoheadrightarrow H^{d-1}(J^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^d_{\mathfrak{m}}(K_A) \to E(A/\mathfrak{m})$ により写像 $J^{d-1} \to E(A/\mathfrak{m})$ を決める。そこで $D^\cdot = \cdots 0 \to D^0 = J^0 \to \cdots \to D^{d-1} = J^{d-1} \to D^d = E(A/\mathfrak{m}) \to 0 \cdots$ とする。$H^i(D^\cdot) \cong H^i(J^\cdot)$ for $i < d-1$, $H^{d-1}(D^\cdot) \cong X$, $H^d(D^\cdot) \cong Y$ である。よって $D^\cdot$ は (D1), (D2), (D5) を満たし, A の fundamental dualizing complex である。

$d = 1$ のとき。$\mathrm{depth}\, K_A = 1$ だから $K^0 = 0$ である。完全列 $0 \to U \to A \to \mathrm{Hom}_A(K_A, K_A) \to 0$ より完全列 $0 \to H^1_{\mathfrak{m}}(K_A) \to E(A/\mathfrak{m}) \to Y \to 0$ ($Y = \mathrm{Hom}_A(U, E(A/\mathfrak{m}))$) を得る。$\ell(U) < \infty$ だから $\ell(Y) < \infty$ である。また完全列 $0 \to K_A \to J^0 = H^0(J^\cdot) \to H^1_{\mathfrak{m}}(K_A) \to H^1(I^\cdot) = 0$ がある。従って $J^0 \to E(A/\mathfrak{m})$ を得る。そこで $D^\cdot = \cdots 0 \to D^0 = J^0 \to D^1 = E(A/\mathfrak{m}) \to 0 \cdots$ とする。$H^0(D^\cdot) \cong K_A$, $H^1(D^\cdot) \cong Y$ であり, $D^\cdot$ は A の funda-

mental dualizing complex である。　　Q.E.D. for (c)$\Rightarrow$(b)

(b)$\Rightarrow$(a)の証明には次のLemmaが必要である。それは前稿の*unconditioned strong d-sequence*（*u.s.d*-列と言おう）の理論の一つの応用である。

(1.2) Lemma([9, (10.7)]). AがFLCで $\operatorname{depth} A > 0$ とすると，$\mathfrak{m}$-準素*ideal* $\mathfrak{q}$ で*Rees*環 $\mathcal{R}(A, \mathfrak{q}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{q}^i$ が*Cohen-Macaulay*となるものが存在する。逆も成立する。

Proof of (b)$\Rightarrow$(a). $\operatorname{depth} A > 0$ の場合。上のLemmaで言う様な*ideal* $\mathfrak{q}$ をとる。$\mathcal{R}(A, \mathfrak{q})$ はA上有限生成環だから*dualizing complex*を持ち，*Cohen-Macaulay*だから*Gorenstein*環の準同型像となる。従って，Aも*Gorenstein*環の準同型像である。

$\operatorname{depth} A = 0$ の場合。$A \supset (0) = U \cap I$（準素分解より，I $\mathfrak{m}$-準素）とする。A/U は*dualizing complex*を持ち，$H^0_{\mathfrak{m}}(A/U) = 0$, $H^i_{\mathfrak{m}}(A/U) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ for $i > 0$ であるから，すでに示したことより*Gorenstein*局所環 R の準同型像である。A/I は*artinian*だから*Gorenstein*局所環 S の準同型像である。ここで $\dim R = \dim S = n \geq \max\{2, d\}$ としてよい。$\varphi : R \oplus S \to A/U \oplus A/I$ とし $B = \varphi^{-1}(A)$ とする。B は環（ネーター的は後で判る）であり，次の可換図形を得る。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & B & \longrightarrow & R \oplus S & \longrightarrow & R\oplus S/B & \longrightarrow 0 & (完全) \\
 & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \wr & & \\
0 \to & A & \longrightarrow & A/U \oplus A/I & \longrightarrow & A/U+I & \longrightarrow 0 & (完全)
\end{array}
$$

$\ell(A/U+I)<\infty$ であるから $R\oplus S$ は B 上有限生成加群となり，B はネーター的である。従って B は $\mathfrak{n}=\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ を極大 *ideal* とする n 次元局所環である。上の完全列より $H^i_{\mathfrak{n}}(B)=0$ *for* $i\neq 1, n$, $H^1_{\mathfrak{n}}(B)\cong R\oplus S/B$（長さ有限）を得る。[3, 1.7] より B は $R\oplus S$ を *canonical module* として持つ。従って (c)⇒(b) 及び *depth* >0 の場合より，B は *Gorenstein* 環の準同型像であり，A もそうである。

Q.E.D. for (b) ⇒ (a)

(1.3) Corollary. $d=3$ のとき，A が *canonical module* を持ち (S_2) であれば，A は *Gorenstein* 環の準同型像である。

(1.4) Corollary. $d=2$ のとき，次は同値である：

(a) A の *canonical module* が存在する。

(b) A/U は *Gorenstein* 環の準同型像である。 (cf. [2, (1.12)])

1 次元 *Cohen-Macaulay* 局所環に対しては，*canonical module* の存在等と *formal fibre* の *Gorenstein* 性とが同値であることが知られている ([6, (5·3)]) が，*Cohen-Macaulay* でない場合も同様の結

果が成立する。即ち，

(1.5) Proposition.　$d=1$ のとき，次は同値である：

(a)　A は Gorenstein 環の準同型像である。

(b)　A の dualizing complex が存在する。

(c)　A の canonical module が存在する。

(d)　$A \to \hat{A}$ は Gorenstein 射である。

Proof.　1 次元局所環は FLC であるから，(a)⇔(b)⇔(c) は (1.1) の特別な場合である。(a)⇒(d) はよく知られている。(d)⇒(b) を示そう。仮定より，A の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し $E(A/\mathfrak{p}) \otimes_A \hat{A} \cong \bigoplus_{P \cap A = \mathfrak{p}} E(\hat{A}/P)$ である。$\hat{A}$ の fundamental dualizing complex $D^{\bullet} = 0 \to \bigoplus_{P \neq \hat{\mathfrak{m}}} E(\hat{A}/P) \to E(\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}) \to 0$ をとる。$\bigoplus_{P \neq \hat{\mathfrak{m}}} E(\hat{A}/P) \cong (\bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(A/\mathfrak{p})) \otimes_A \hat{A}$，$E(\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}) \cong E(A/\mathfrak{m}) \otimes_A \hat{A} \cong E(A/\mathfrak{m})$ であるから，A 上の complex $I^{\bullet} = 0 \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(A/\mathfrak{p}) \to E(A/\mathfrak{m}) \to 0$ と $I^{\bullet} \otimes_A \hat{A} \cong D^{\bullet}$ as complexes を得る。このとき $I^{\bullet}$ は A の fundamental dualizing complex である。　　Q.E.D.

2 次元だと canonical module の存在だけでは駄目で，formal fibre の Gorenstein 性の条件を加える必要がある。ただし，equi-dimensional のときは不要である。それらを示す前に，dualizing complex の存在に関して有効な Faltings-Ogoma の結果を述べてお

こう。

(1.6) Lemma ([4, Lemma 3 and 5], [15, 3.7]). $B = R \times_T S$
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dr, "\varphi"] & \\ B \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\ & S \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$
を環の pull-back diagram で, φ が onto, ψ が finite なるものとする。R (resp. S) の fundamental dualizing complex $I^\cdot$ (resp. $J^\cdot$) が存在して $\mathrm{Hom}_R(T, I^\cdot) \cong \mathrm{Hom}_S(T, J^\cdot)$ as complexes を満たしているとする。このとき, B の fundamental dualizing complex $D^\cdot$ で $\mathrm{Hom}_B(R, D^\cdot) \cong I^\cdot$, $\mathrm{Hom}_B(S, D^\cdot) \cong J^\cdot$ as complexes を満たすものが存在する。 特に T が局所環のときは, R と S が共に dualizing complex を持てば, B も dualizing complex を持つ。

(1.7) Proposition. $d=2$ のとき, 次は同値である:

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である。

(b) A の dualizing complex が存在する。

(c) A の canonical module が存在して, $A \to \hat{A}$ が Gorenstein 射である。

(d) 任意の ideal $\mathfrak{a}$ $(\neq A)$ に対し, $A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在する。

Proof. (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c), (d) が任意の次元で成立することはよく知られている。

(c)⇒(d)： $\dim A/\mathfrak{a}=2$ のとき, $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, K_A)$が $A/\mathfrak{a}$ の canonical module である。$\dim A/\mathfrak{a}=1$ なら, $A/\mathfrak{a}\to\widehat{A/\mathfrak{a}}$ が Gorenstein射だから (1.5)により, よい。$\dim A/\mathfrak{a}=0$ なら, 明らか。

(d)⇒(a)： $A\supset(0)=U\cap I$ (準素分解より)とする。(1.4)より A/U はGorenstein局所環Rの準同型像である。従って$U=0$ならよい。$U\neq0$とする。$\dim A/I\leqq1$で, A/I は canonical module を持つから Gorenstein局所環Sの準同型像である。(cf. (1.5)) ここで $\dim R=\dim S=2$ としてよい。$\varphi: R\oplus S\to A/U\oplus A/I$ とし, $B=\varphi^{-1}(A)$とする。Bは環(ネーター的は後で判る)であり, 次の可換図形を得る。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & R\oplus S \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & R\oplus S/B \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 & (\text{完全}) \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A/U\oplus A/I \arrow[r] & A/U+I \arrow[r] & 0 & (\text{完全})
\end{tikzcd}$$

$R\oplus S/B\cong A/U+I$は有限生成B-加群であるから $R\oplus S$ もそうであり, 従ってBはネーター的である。よってBは $\mathfrak{n}=\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$を極大idealとする2次元局所環である。$A/U+I$ は局所環で, $R\to A/U+I$ と $S\to A/U+I$は共に onto であるから, (1.6)によりBの dualizing complexが存在する。上の完全列より $H^0_{\mathfrak{n}}(B)=0$, $H^1_{\mathfrak{n}}(B)\cong H^0_{\mathfrak{n}}(R\oplus S/B)$有限生成であるから, (1.1)より$B$はGorenstein環の準同型像であり, 従ってAもそうである。　　Q.E.D.

(1.8) Corollary.　$d=2$のとき, Aの canonical module が存

在し，Aが*equidimensional*（i.e. $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)$, $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$）であるならば，AはGorenstein環の準同型像である。

Proof. 任意の*ideal* $\mathfrak{a}\,(\neq A)$をとる。$\dim A/\mathfrak{a} = 0$ なら，$A/\mathfrak{a}$ の*canonical module*が存在することは明らか。$\dim A/\mathfrak{a} = 2$ なら，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, K_A)$が $A/\mathfrak{a}$ の *canonical module* である。$\dim A/\mathfrak{a} = 1$ とする。P を $\hat{A}$ の素*ideal* $\neq \hat{\mathfrak{m}}$ で $\mathfrak{a}\hat{A}$ を含むものとする。$\mathfrak{p} = P \cap A$ とおく。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}, \supseteq \mathfrak{a}$ である。Aが*equidimensional*だから $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Supp}(K_A)$ で $(K_A)_{\mathfrak{p}} \cong K_{A_{\mathfrak{p}}}$，即ち $A_{\mathfrak{p}}$ の*canonical module*が存在する。([2, (1.7) and 4.3]) $K_{A_{\mathfrak{p}}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \hat{A}_P \cong K_{\hat{A}_P}$ で $\hat{A}_P/\mathfrak{p}\hat{A}_P$は*artinian*だから，[2, 4.1]により $\hat{A}_P/\mathfrak{p}\hat{A}_P$はGorensteinである。従って $A/\mathfrak{a} \to \widehat{A/\mathfrak{a}}$ はGorenstein射であり，(1.5)により $A/\mathfrak{a}$ の *canonical module*が存在する。よって(1.7)(d)が成立し，主張を得る。　Q.E.D.

(1.9) Remark. 任意の整数 $n \geq 2$ に対し，n次元局所環で，*canonical module* は存在するが，*dualizing complex*は存在しない，ものがある。（cf. [5]）

(1.10) Remark. 任意の*ideal* $\mathfrak{a}\,(\neq A)$に対し $A/\mathfrak{a}$ の *canonical module*が存在すること，と *formal fibre*がすべてGorensteinであること，の両方を仮定すると Aの*dualizing complex*が存在

することが知られている。([15, 5.5])

§2. この節では，局所環に対し(SC)が正しいことを示すには，Serreの条件(S_2)を仮定してよいこと，及び，次元4以下の局所環に対し(SC)が正しいこと，を証明しよう。

(2.1) Lemma. $\dim < n$ なる局所環に対し，(SC)は正しい．
$\dim = n$，(S_2)なる局所環に対し，(SC)は正しい．
$\Longrightarrow$ $\dim = n$ なる局所環に対し，(SC)は正しい．

Proof. Bをdualizing complexを持つn次元局所環とする。主張を得るためには$\mathrm{Ass}(B) = \mathrm{Assh}(B)$としてよいことをまず示そう。$B \supset (0) = I \cap J$ ($I = U_B(0)$，準素分解より)とする。今，B/IがGorenstein局所環Rの準同型像であるとしよう。$\dim B/J < n$だから仮定よりGorenstein局所環Sの準同型像である。ここで，$\dim R = \dim S = n$としてよい。$\varphi : R \oplus S \to B/I \oplus B/J$とし，$C = \varphi^{-1}(B)$とおく。(1.7)のProof中の議論と同様にして，Cはdualizing complexを持つn次元局所環であることが判る。また$\mathrm{Ass}(C) = \mathrm{Assh}(C)$である。従って，$C$がGorenstein環の準同型像ならば$B$もそうである。故に，$\mathrm{Ass}(B) = \mathrm{Assh}(B)$としてよい。

今，主張が成立しないとする。すでに示したことにより，dualizing complexを持ちGorenstein環の準同型像でないn次元局所環Bで$\mathrm{Ass}(B)=\mathrm{Assh}(B)$となるものが存在する。仮定より$B$は$(S_2)$でない。従って $depth\, B_{\mathfrak{p}}=1$　$\dim B_{\mathfrak{p}}>1$となる素ideal $\mathfrak{p}$がある。$\Delta(B)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(B) \mid depth\, B_{\mathfrak{p}}=1,\ \dim B_{\mathfrak{p}}>1\}$とおく。$Z=\mathrm{Coker}(B\xrightarrow{nat.}\mathrm{Hom}_B(K_B,K_B))$とおく。($\mathrm{Ass}(B)=\mathrm{Assh}(B)$だから$\mathrm{Ker}$は$(0)$。([2,(1.8)]))
$\mathfrak{p}\in\Delta(B)$ならば$depth\, B_{\mathfrak{p}}=1$，$depth\, \mathrm{Hom}_B(K_B,K_B)_{\mathfrak{p}}\geq 2$だから$depth\, Z_{\mathfrak{p}}=0$，即ち$\Delta(B)\subseteq \mathrm{Ass}(Z)$である。$\sigma(B)=\max\{\dim B_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p}\in\Delta(B)\}$とおく。$\sigma(B)>1$である。また，$\overline{\Delta}(B)=\{\mathfrak{p}\in\Delta(B) \mid \dim B_{\mathfrak{p}}=\sigma(B)\}$，$\Delta'(B)=\Delta(B)\setminus\overline{\Delta}(B)$とおく。上に述べた反例の中で$\sigma(B)$を最小にする$B$をとり，その$\sigma(B)$を$s$とおく。$s>1$である。dualizing complexを持つ次元2以上の局所環$(R,\mathfrak{p})$は，$\mathrm{Ass}(R)=\mathrm{Assh}(R)$を満たせば，$\ell(H^1_{\mathfrak{p}}(R))<\infty$である。従って，非零因子$x\in\bigcap_{\mathfrak{p}\in\overline{\Delta}(B)}\mathfrak{p}\setminus\bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta'(B)}\mathfrak{p}$で$x\cdot H^1_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}})\doteq 0$ for $\forall\mathfrak{p}\in\overline{\Delta}(B)$となるものが存在する。仮定より，$B/U_B(xB)$はGorenstein局所環$G$の準同型像である。$\dim G=n$としてよい。$B\to B/U_B(xB)$，$G\to B/U_B(xB)$によるfibre productを$C$とする：

$$C=B\underset{B/U_B(xB)}{\times}G \quad \begin{array}{ccc} & B & \\ \nearrow & & \searrow \\ & & \\ \searrow & & \nearrow \\ & G & \end{array} B/U_B(xB),\quad 0\to C\to B\oplus G\to B/U_B(xB)\to 0 \ \text{完全。}$$

(1.7)のProof中の議論と同様にして，Cはdualizing complexを持つn次元局所環であることが判る。また$\mathrm{Ass}(C)=\mathrm{Assh}(C)$である。$B$は$C$の準同型像だから，$C$はGorenstein環の準同型像

でない。仮定より C は (S_2) でない。従って $\Delta(C)\neq\phi$。$P\in\bar{\Delta}(C)$ をとり，$t=\dim C_P=\sigma(C)$ とおく。B のとり方より $t\geqq s$ である。今，$(B/U_B(xB))_P=0$ とすると，$C_P\cong B_P$ or G_P であるが G_P は Gorenstein だから $C_P\cong B_P$ である。従って $PB\in\bar{\Delta}(B)$ で $PB\ni x$ となる。故に $U_B(xB)_P\neq B_P$ で矛盾。よって $(B/U_B(xB))_P\neq 0$。$\dim(B/U_B(xB))_P=r$ とおく。$\dim B_P=\dim G_P=\dim C_P=r+1$ となり，$\dim C_P=t$ より $r+1=t\geqq s>1$ となる。完全列 $0\to C_P\to B_P\oplus G_P\to(B/U_B(xB))_P\to 0$ において，$\mathrm{depth}\, C_P=1$, $\mathrm{depth}\, G_P=r+1\geqq 2$, $\mathrm{depth}(B/U_B(xB))_P>0$ であるから $\mathrm{depth}\, B_P=1$ となり，$PB\in\bar{\Delta}(B)$ となる。従って $x\cdot H_P^1(B_P)=0$ だから，$H_P^1(B_P)\to H_P^1(B_P/xB_P)$ は単射である。次に $U_B(xB)_P/xB_P$ が長さ有限であることを示そう。$P\supsetneqq Q\in\mathrm{Spec}(C)$ で $U_B(xB)_Q/xB_Q\neq 0$ となるものが存在したとする。当然 $QB\ni x$ である。$U_B(xB)$ の定義より，$\mathfrak{q}\in\mathrm{Ass}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)\setminus\mathrm{Assh}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)$ が存在する。このとき $\mathrm{depth}\, B_{\mathfrak{q}}=1$ で $\dim B_{\mathfrak{q}}\leqq\dim B_Q<\dim B_P=s$ であり $\mathfrak{q}\ni x$ だから $\mathfrak{q}\notin\Delta(B)$ となる。従って，$\dim B_{\mathfrak{q}}=1$ で $\mathfrak{q}\in\mathrm{Assh}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)$ となって，矛盾。故に，$\ell(U_B(xB)_P/xB_P)<\infty$ である。従って，$H_P^1(U_B(xB)_P/xB_P)=0$ となり，$H_P^1(B_P/xB_P)\to H_P^1(B_P/U_B(xB)_P)$ は単射である。先の単射と合わせて，$H_P^1(B_P)\to H_P^1((B/U_B(xB))_P)$ が単射であることが判る。故に，完全列 $0=H_P^0((B/U_B(xB))_P)\to H_P^1(C_P)\to H_P^1(B_P\oplus G_P)\cong H_P^1(B_P)\to H_P^1((B/U_B(xB))_P)$ ($H_P^1(G_P)=0$ である)より，$H_P^1(C_P)=0$ を得る。これは $\mathrm{depth}\, C_P=1$ に矛盾する。従って，反

例は存在しない。　Q.E.D.

次元4以下で(SC)が正しいことを示すのであるが，そのためには(1.2)を半局所環の場合に拡張しておく必要があるので，まずそれを述べることにする。

(2.2) Remark. (1.2)で言う$\mathfrak{q}$はどの様にとればよかったかを見てみよう。FLC の場合には，十分大きなtをとれば，$\mathfrak{m}^t$に含まれるパラメーター系は u.s.d-列をなす([9, (7.7)])。その様なパラメーター系 $a_1, \ldots, a_d$ をとり，ideal $(a_1, \ldots, a_d)$ による Rees 環をR，graded 極大 ideal をNとすると，$H_N^0(R)=0$ ([9, (5.2)])で，$1 \le p \le d$ に対し $[H_N^p(R)]_i = 0$ for $i < 2-p$, $i \ge 0$ ([9, (5.7)])である。従って，Rの$d-1$次以上の Veronese 部分環R'をとれば $H_{N'}^p(R') = 0$ for $p \ne d+1$ (N'はR'の graded 極大 ideal) となる([9, (10.6)])。よって，$u \ge d-1$として $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)^u$ とおけばよいことが判る。即ち，勝手にパラメーター系 $x_1, \ldots, x_d$ をとり，十分大きなt，uをとり $\mathfrak{q} = (x_1^t, \ldots, x_d^t)^u$ とすればよいと言う要領である。(詳しくは，山岸氏の稿，[9]を見て下さい。)

$(B, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s)$を半局所環で $\mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_1 = \cdots = \mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_s$ ($= n$ とおく)なるものとする。$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_s$ とおく。今，$\operatorname{depth} B_{\mathfrak{n}_i} > 0$ for $i = 1, \ldots, s$，$\ell(H_{\mathfrak{n}}^i(B)) < \infty$ for $i \ne n$ と仮定する。($H_{\mathfrak{n}}^i(B) \cong H_{\mathfrak{n}_1}^i(B_{\mathfrak{n}_1}) \oplus \cdots$

$\oplus H^i_{\mathfrak{n}_s}(B_{\mathfrak{n}_s})$である)　$x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{n}$ を，各 i に対し $B_{\mathfrak{n}_i}$ のパラメーター系になる様にとる。t, u を，$\mathfrak{q}=(x_1^t,\dots,x_n^t)^u$ としたとき，各 i に対し $R(B_{\mathfrak{n}_i}, \mathfrak{q}B_{\mathfrak{n}_i})$ が Cohen-Macaulay になる様に十分大きくとる。そのとき，$R(B,\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay である。まとめて，$(B,\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_s)$ を $\mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_1=\cdots=\mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_s$ なる半局所環とする。depth $B_{\mathfrak{n}_i}>0$ for $i=1,\dots,s$，$\ell(H^i_{\mathfrak{n}}(B))<\infty$ for $i\neq \dim B$ $(\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1\cdots\mathfrak{n}_s)$ となっていれば，ideal $\mathfrak{q}$ で $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{n}$，$R(B,\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay となるものが存在する。

(2.3) Theorem.　$\dim A \leqq 4$ のとき，A の dualizing complex が存在すれば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof.　$d=\dim A \leqq 2$ ならば，§1 ですでに示されている。$d=3$ のときは，(1.3) と (2.1) により判る。$d=4$ とする。(2.1) により，A は (S_2) である，としてよい。さらに (1.1) により，A が FLC でない場合のみやればよい。$\mathrm{CM}(A)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{p}}$ Cohen-Macaulay$\}$ は open だから，ideal $\mathfrak{a}$ が存在して $\mathrm{Spec}(A)\setminus \mathrm{CM}(A)=V(\mathfrak{a})$ となる。A が (S_2) で non-FLC だから $\mathrm{ht}\,\mathfrak{a}=3$ である。故に $V(\mathfrak{a})$ は有限集合である。$\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$ について，$\dim A_{\mathfrak{p}}=3$，$A_{\mathfrak{p}}$ は (S_2) で dualizing complex を持つから $\ell(H^2_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}))<\infty$ である。従って，非零因子 $a\in\mathfrak{a}$ で，$a\cdot H^2_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})=0$ for $\forall \mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$

となるものが存在する。Aは(S_2)であるから $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a}A)=\mathrm{Assh}(A/\mathfrak{a}A)$ で $A/\mathfrak{a}A \hookrightarrow C=\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{a}A}(K_{A/\mathfrak{a}A}, K_{A/\mathfrak{a}A})$となる。([2,(1.8)]) $\dim C_{\mathfrak{n}}=3$ for $\forall\mathfrak{n}\in \mathrm{Max}(C)$で, Cは$(S_2)$([2,3.2])かつ *dualizing complex*を持つから, (2.2)と(1.1)の Proof of (b)⇒(a) より, Cは *Gorenstein* 環Gの準同型像である。ここで $\mathrm{Max}(G)=\{\psi^{-1}(\mathfrak{n}) \mid \mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(C)\}$ (ψは$G\twoheadrightarrow C$), $\dim G_N=4$ for $\forall N\in\mathrm{Max}(G)$ としてよい。$A\to C$と$G\xrightarrow{\psi}C$ による *fibre product* をBとおく。$B=A\times_C G$ $\begin{smallmatrix} & A & \\ \nearrow & & \searrow \\ & & C, \\ \searrow & & \nearrow_{\psi} \\ & G & \end{smallmatrix}$

$0\to B\to A\oplus G\to C\to 0$ 完全。

今までの議論と同様にして, Bは4次元局所環であることが判る。まず, Bが *dualizing complex* を持つことを示そう。Aの *fundamental dualizing complex* を $I^{\cdot}=0\to I^0\to\cdots\to I^4\to 0$, G のを $J^{\cdot}=0\to J^0\to\cdots\to J^4\to 0$ とすると, $\mathrm{Hom}_A(C,I^{\cdot})$と$\mathrm{Hom}_G(C,J^{\cdot})$は共にCの *fundamental dualizing complex* であり, $\mathrm{Hom}_A(C,I^0)=0$, $\mathrm{Hom}_G(C,J^0)=0$であるから, Cを連結なものの直和に分解して各々の上では同型である(cf. [16,(4·6)], [11,4.2], Cは半局所環)ことより, $\mathrm{Hom}_A(C,I^{\cdot})\cong\mathrm{Hom}_G(C,J^{\cdot})$ *as complexes* であることが判る。従って(1.6)により, Bは *dualizing complex*を持つ。次に, Bの極大でない素 *ideal* Pに対し, B_Pが *Cohen-Macaulay* であることを示そう。$C_P=0$なら, $B_P\cong A_P$ or G_P。$B_P\cong G_P$ならよい。$B_P\cong A_P$とする。$C_P=0$だから$(A/\mathfrak{a}A)_P=0$となり $PA\not\ni\mathfrak{a}$となって, $\mathfrak{a}$のとり方より A_Pは *Cohen-Macaulay* である。$C_P\neq 0$とし, dim

$c_P = r$ とおく。このとき $\dim B_P = \dim A_P = \dim G_P = r+1$ である。$0 \leq r \leq 2$ である。$r = 0, 1$ のとき，A と C は共に (S_2) で G は Gorenstein だから，完全列 $0 \to B_P \to A_P \oplus G_P \to C_P \to 0$ より B_P が Cohen-Macaulay であることが判る。$r = 2$ のとき，同様に上の完全列より $\operatorname{depth} B_P \geq 2$ が判る。$\mathfrak{a} \cdot H^2_{PB_P}(A_P) = 0$ だから $H^2_{PB_P}(A_P) \to H^2_{PB_P}(A_P/\mathfrak{a}A_P)$ は単射である。$A_P/\mathfrak{a}A_P$ は 2 次元で $\mathrm{Ass}(A_P/\mathfrak{a}A_P) = \mathrm{Assh}(A_P/\mathfrak{a}A_P)$ であるから，$\ell(\mathrm{Coker}(A_P/\mathfrak{a}A_P \to C_P)) < \infty$ となり $H^1_{PB_P}(\mathrm{Coker}(A_P/\mathfrak{a}A_P \to C_P)) = 0$ である。故に $H^2_{PB_P}(A_P/\mathfrak{a}A_P) \to H^2_{PB_P}(C_P)$ は単射である。先の単射と合わせて，$H^2_{PB_P}(A_P) \to H^2_{PB_P}(C_P)$ が単射であることが判る。従って，完全列 $0 = H^1_{PB_P}(C_P) \to H^2_{PB_P}(B_P) \to H^2_{PB_P}(A_P \oplus G_P) \cong H^2_{PB_P}(A_P) \to H^2_{PB_P}(C_P)$ より $H^2_{PB_P}(B_P) = 0$ を得，B_P が Cohen-Macaulay であることが判る。よって，$\mathrm{Ass}(B) = \mathrm{Assh}(B)$ だから，B は FLC である。(1.1) より B は Gorenstein 環の準同型像である。A は B の準同型像であるから，主張を得る。　　Q.E.D.

§3.

FLC 及び次元 4 以下の局所環の場合には，(SC) の正しいことが判ったのだが，それら以外の場合には現在までのところ殆んど判っていない。但し，A に色々と条件を付けると判ることがあるので，この節ではそれについて記しておきたい。ここでの議論に，u.s.d-列の理論が有用である。

以後(3.9)まで，次の四つを仮定して議論を進める。

(ア)　A は fundamental dualizing complex $D^\cdot = 0 \to D^0 \to \cdots \to D^d \to 0$ を持つ。

(カ)　$d \geqq 5$.

(サ)　A は (S_{d-2}) である。

(タ)　A は FLC でない。

(3.1) Lemma. $H^i(D^\cdot)=0$ for $i>2$. $\ell(H^2(D^\cdot))<\infty$. $\dim H^1(D^\cdot)=1$.

Proof.　まず，$\mathrm{Hom}_A(H^i(D^\cdot), E(A/\mathfrak{m})) \cong H^{d-i}_{\mathfrak{m}}(A)$ であることを再記しておく。depth $A \geqq d-2$ だから $H^i(D^\cdot)=0$ for $i \geqq 2$ ($\geqq \dim A -$ depth A) である。(S_{d-2})だから，極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ について $\dim A_\mathfrak{p} - \operatorname{depth} A_\mathfrak{p} \leqq 1$ となり，$H^2(D^\cdot_\mathfrak{p})=0$ である。($D^\cdot_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の fundamental dualizing complex) 従って $\ell(H^2(D^\cdot))<\infty$ である。$\dim A/\mathfrak{p} \geqq 2$ なる素 ideal $\mathfrak{p}$ について，$A_\mathfrak{p}$ は Cohen-Macaulay だから，$H^1(D^\cdot_\mathfrak{p})=0$ となり，$\dim H^1(D^\cdot) \leqq 1$ である。A は FLC でないから，$\dim H^1(D^\cdot)=1$ を得る。　Q.E.D.

(3.2) Lemma. $H^i_\mathfrak{m}(K_A)=0$ for $i \neq 2,3,d$. $H^2_\mathfrak{m}(K_A) \cong H^0_\mathfrak{m}(H^1(D^\cdot))$. $H^3_\mathfrak{m}(K_A) \neq 0$.　従って，depth $K_A = 2$ or 3 であって，depth $K_A = 3$ $\Leftrightarrow$ depth $H^1(D^\cdot) > 0$ $\Leftrightarrow$ $H^1(D^\cdot)$ Cohen-Macaulay.

Proof. $K_A \cong H^0(D^\cdot)$である。$B^i = \mathrm{Im}(D^{i-1} \to D^i)$, $Z^i = \mathrm{Ker}(D^i \to D^{i+1})$, $H^i = H^i(D^\cdot) = Z^i/B^i$とおく。次の4つの短完全列がある：

(1) $0 \to K_A \to D^0 \to B^1 \to 0$　　(2) $0 \to B^1 \to Z^1 \to H^1 \to 0$

(3) $0 \to Z^1 \to D^1 \to B^2 \to 0$　　(4) $0 \to B^2 \to Z^2 \to H^2 \to 0$ 。

更に$H^i(D^\cdot) = 0$ for $i > 2$だから，完全列 (5) $0 \to Z^2 \to D^2 \to \cdots \to D^d \to 0$ がある。$D^0 \cong \bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=0} E(A/\mathfrak{p})$だから$H^i_{\mathfrak{m}}(D^0) = 0$ for $\forall i$。従って，完全列(1)より$H^i_{\mathfrak{m}}(K_A) \cong H^{i-1}_{\mathfrak{m}}(B^1)$ for $\forall i$。$D^i \cong \bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=i} E(A/\mathfrak{p})$だから完全列(5)より$H^i_{\mathfrak{m}}(Z^2) = 0$ for $i \neq d-2$, $H^{d-2}_{\mathfrak{m}}(Z^2) \cong E(A/\mathfrak{m})$。従って，$\ell(H^2) < \infty$であるから，完全列(4)より$H^i_{\mathfrak{m}}(B^2) = 0$ for $i \neq 1, d-2$, $H^1_{\mathfrak{m}}(B^2) \cong H^2$, $H^{d-2}_{\mathfrak{m}}(B^2) \cong E(A/\mathfrak{m})$。$H^i_{\mathfrak{m}}(D^1) = 0$ for $\forall i$だから，完全列(3)より$H^i_{\mathfrak{m}}(Z^1) = 0$ for $i \neq 2, d-1$, $H^2_{\mathfrak{m}}(Z^1) \cong H^2$, $H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(Z^1) \cong E(A/\mathfrak{m})$。$\dim H^1 = 1$だから，完全列(2)より$H^i_{\mathfrak{m}}(B^1) = 0$ for $i \neq 1, 2, d-1$, $H^1_{\mathfrak{m}}(B^1) \cong H^0_{\mathfrak{m}}(H^1)$, $H^2_{\mathfrak{m}}(B^1) \hookleftarrow H^1_{\mathfrak{m}}(H^1) \neq 0$, $H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^1) \cong E(A/\mathfrak{m})$。これらより主張を得る。　Q.E.D.

$\mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{CM}(A) = \bigcup_{i>0} \mathrm{Supp}(H^i(D^\cdot)) = \mathrm{Supp}(H^1(D^\cdot))$ である。そこで ideal $\mathfrak{a}$を $V(\mathfrak{a}) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{CM}(A)$, $\mathfrak{a} \cdot H^i(D^\cdot) = 0$ for $i \neq 0$ (故に$\mathfrak{a} \cdot H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for $i \neq d$) となるようにとる。$\dim A/\mathfrak{a} = 1$で，$V(\mathfrak{a})$は有限集合である。

(3.3) Proposition. $\mathfrak{a}$の元$a_1, \ldots, a_{d-1}$で，次の(イ)(ロ)(ハ)を満たすものが存在する。

(イ) $a_1,\dots,a_{d-1}$ はAのパラメーター系の一部をなす.

(ロ) $a_1,\dots,a_{d-1}$ の中, どの $d-2$ 個もA-正則列をなす.

(ハ) $a_1,\dots,a_{d-1}$ は u. s. d-列 on A である.

Proof. $\mathrm{ht}\,\mathfrak{a}=d-1$ であるから, $\mathfrak{a}$ の元 $x_1,\dots,x_{d-1}$ で $\mathrm{ht}(x_1,\dots,x_{d-1})=d-1$ となるものがある。これは明らかに(イ)を満たす。Aが (S_{d-2}) であるから, $x_1,\dots,x_{d-1}$ は(ロ)も満たす。このとき, 任意の $t_1,\dots,t_{d-1}>0$ に対して, $x_1^{t_1},\dots,x_{d-1}^{t_{d-1}}$ も(イ),(ロ)を満たす。$\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$ に対し, $A_\mathfrak{p}$ は (S_{d-2}) で $\dim A_\mathfrak{p}=d-1$ であるから, $A_\mathfrak{p}$ は FLC である。従って[9,(7.7)]により, 整数 $n>0$ が存在して $\mathfrak{p}^nA_\mathfrak{p}$ に含まれるパラメーター系は u. s. d-列 on $A_\mathfrak{p}$ for $\forall\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$ である。$y_i=x_i^n$ $(i=1,\dots,d-1)$, $\mathfrak{y}=(y_1,\dots,y_{d-1})$ とおく。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ をとる。$\mathfrak{p}\not\supseteq\mathfrak{a}$ ならば $H_1(y_1^{t_1},\dots,y_{d-1}^{t_{d-1}};A)=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ である。$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$ ならば $y_1,\dots,y_{d-1}$ は u. s. d-列 on $A_\mathfrak{p}$ であるから[9,(3.4)]により $\mathfrak{y}A_\mathfrak{p}\cdot H_1(y_1^{t_1},\dots,y_{d-1}^{t_{d-1}};A_\mathfrak{p})=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ である。従って $\ell(\mathfrak{y}\cdot H_1(y_1^{t_1},\dots,y_{d-1}^{t_{d-1}};A))<\infty$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$。$a_i=y_i^2$ $(i=1,\dots,d-1)$ とおく。任意の整数 $t_1,\dots,t_{d-1}>0$ をとり, $L=H_1(a_1^{t_1},\dots,a_{d-1}^{t_{d-1}};A)$ とおく。$L\cong(a_1^{t_1},\dots,a_{d-2}^{t_{d-2}}):a_{d-1}^{t_{d-1}}/(a_1^{t_1},\dots,a_{d-2}^{t_{d-2}})$ で $\ell(\mathfrak{y}L)<\infty$ であるから, $\mathfrak{y}L\subseteq H^0_\mathfrak{m}(A/(a_1^{t_1},\dots,a_{d-2}^{t_{d-2}}))\cong H^{d-2}_\mathfrak{m}(A)$ (cf. (ロ), $\mathfrak{a}\cdot H^{d-2}_\mathfrak{m}(A)=0$)。$\mathfrak{a}\cdot H^{d-2}_\mathfrak{m}(A)=0$ だから $(a_1,\dots,a_{d-1})L\subseteq\mathfrak{y}^2L\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{y}L=0$。[9,(3.4)]により $a_1,\dots,a_{d-1}$ は u. s. d-列 on Aである。(注:

(ハ)を満たせば[9,(3.8)]により(イ)を満たし(但し, $ht(a_1,\dots,a_{d-1})>0$とする), (イ)を満たせば(S_{d-2})だから(ロ)を満たす。((S_2)だから, $\mathrm{Ass}(A)=\mathrm{Assh}(A)$である。([15, 4.1], [3, 1.1]) また, Aはcatenaryである。これは今まで断らず使っている。)) Q.E.D.

$\mathfrak{a}$の元$a_1,\dots,a_{d-1}$を(イ),(ロ),(ハ)を満たすようにとり, $\mathfrak{q}=(a_1,\dots,a_{d-1})$とおく。

(3.4) Lemma. (1) $U_A(a_2,\dots,a_{d-1})=(a_2,\dots,a_{d-1}):a_1$.

(2) $\mathrm{Supp}(H_1(a_1,\dots,a_{d-1};A))=V(\mathfrak{a})$.

Proof. (1) $(a_2,\dots,a_{d-1})=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ を最短準素ideal分解で$\dim A/\mathfrak{q}_i=2 \Leftrightarrow i\leq s$ $(1\leq s\leq t)$なるものとする。$\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$とおく。$\mathfrak{p}_i\not\ni a_1$ for $i\leq s$である。$s<i\leq t$とする。$\dim A_{\mathfrak{p}_i}>d-2$で, $a_2,\dots,a_{d-1}$は$A_{\mathfrak{p}_i}$の極大正則列であるから, $A_{\mathfrak{p}_i}$はCohen-Macaulayでない。従って$\mathfrak{p}_i\supseteq\mathfrak{a}\ni a_1$。$a_1^n\in\mathfrak{q}_i$ for $s<i\leq t$となる整数$n>0$をとる。$a_1,\dots,a_{d-1}$はu. s. d-列だから$(a_2,\dots,a_{d-1}):a_1=(a_2,\dots,a_{d-1}):a_1^n$
$=\bigcap_{i=1}^{t}(\mathfrak{q}_i:a_1^n)=\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{q}_i=U_A(a_2,\dots,a_{d-1})$。

(2) $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(H_1(a_1,\dots,a_{d-1};A))$をとると, $\mathfrak{p}\ni a_1,\dots,a_{d-1}$で, $a_1,\dots,a_{d-1}$は$A_{\mathfrak{p}}$のパラメーター系の一部であって$A_{\mathfrak{p}}$-正則列でない。従って$A_{\mathfrak{p}}$はCohen-Macaulayでない。故に$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$。$\mathfrak{p}$を$\mathfrak{a}$の極小

素idealとする。$\dim A_{\mathfrak{p}} = d-1$ で，$a_1,\dots,a_{d-1}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ のパラメーター系である。$A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay でないから $a_1,\dots,a_{d-1}$ は $A_{\mathfrak{p}}$-正則列でない。故に，$H_1(a_1,\dots,a_{d-1};A_{\mathfrak{p}}) \neq 0$ で，$V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Supp}(H_1(a_1,\dots,a_{d-1};A))$ となる。 Q.E.D.

(3.5) Lemma. $\operatorname{depth} A = d-1$ のとき，

$\operatorname{depth} K_A = 3 \iff A/U_A(a_2,\dots,a_{d-1})$ Cohen-Macaulay .

Proof. $L = U_A(a_2,\dots,a_{d-1})/(a_2,\dots,a_{d-1})$, $B = A/(a_2,\dots,a_{d-1})$, $C = A/U_A(a_2,\dots,a_{d-1})$ とおく。完全列 $0 \to L \to B \to C \to 0$ を得る。$L = (a_2,\dots,a_{d-1}) : a_1/(a_2,\dots,a_{d-1}) \cong H_1(a_1,\dots,a_{d-1};A)$ だから $\dim L = 1$。$\operatorname{depth} B = 1$ だから $\operatorname{depth} L = 1$。$C$ は2次元で $U_C(0) = 0$ だから，C は FLC である。完全列 $0 \to H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B) \to H^1_{\mathfrak{m}}(C) \to 0$ を得る。各々の $E(A/\mathfrak{m})$-dual を L', B', C' として，完全列 $0 \to C' \to B' \to L' \to 0$ を得る。L は1次元Cohen-Macaulayであるから，L' もそうである。$H^1_{\mathfrak{m}}(B) \cong H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A)$ である((ロ), $\mathfrak{a}\cdot H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A)$) から，$B' \cong H^1(D^{\cdot}) \otimes_A \hat{A}$。$\ell(C') < \infty$ であるから，$\operatorname{depth} K_A = 3 \iff \operatorname{depth} H^1(D^{\cdot}) > 0 \iff C' = 0 \iff C$ Cohen-Macaulay (cf. (3.2)) となる。 Q.E.D.

(3.6) Corollary. $\operatorname{depth} A = d-1$ かつ $\operatorname{depth} K_A = 3$

$\iff A/(a_1,\dots,a_{d-1})$ Cohen-Macaulay .

Proof. L, B, C は(3.5)の Proof と同じとする。可換図形

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
0 & \to & L & \to & B & \to & C & \to & 0 & & (\text{完全}) \\
 & & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 & & \downarrow a_1 & & & & \\
0 & \to & L & \to & B & \to & C & \to & 0 & & (\text{完全})
\end{array}
$$

より, Coker の完全列 $0 \to L \to B/a_1B \to C/a_1C \to 0$ を得る。

$B/a_1B \cong A/(a_1, \ldots, a_{d-1})$, $C/a_1C \cong A/(a_1) + U_A(a_2, \ldots, a_{d-1})$ である。

$\Rightarrow$: (3.5)より C は2次元 Cohen-Macaulay で C/a_1C は1次元 Cohen-Macaulay である。$L \hookrightarrow B$ で $\operatorname{depth} B = 1$ だから, $\operatorname{depth} L > 0$。故に $\operatorname{depth} B/a_1B > 0$。

$\Leftarrow$: $L \hookrightarrow B/a_1B$ で $\operatorname{depth} B/a_1B > 0$ だから $\operatorname{depth} L > 0$。$\operatorname{depth} C > 0$ だから $\operatorname{depth} B > 0$ となり $\operatorname{depth} A = d-1$ を得る。$H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B)$ は単射である。$H^1_{\mathfrak{m}}(B) \cong H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A)$ で $a_1 \cdot H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ だから $H^1_{\mathfrak{m}}(B) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B/a_1B)$ は単射である。故に $H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B/a_1B)$ は単射である。完全列 $0 = H^0_{\mathfrak{m}}(B/a_1B) \to H^0_{\mathfrak{m}}(C/a_1C) \to H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B/a_1B)$ より, $H^0_{\mathfrak{m}}(C/a_1C) = 0$ を得る。従って C/a_1C は1次元 Cohen-Macaulay で, C は2次元 Cohen-Macaulay である。故に, (3.5)より $\operatorname{depth} K_A = 3$。　Q.E.D.

(3.7) Lemma. $\operatorname{depth} A = d-1$ とすると, 任意の $c_2, \ldots, c_{d-1} \in A$ に対し $a_1, a_2 - c_2a_1, \ldots, a_{d-1} - c_{d-1}a_1$ は(イ),(ロ),(ハ)を満たす。

Proof. $b_1 = a_1$, $b_i = a_i - c_i a_1$ $(i = 2, \ldots, d-1)$ とおく。$(b_1, \ldots, b_{d-1}) = \mathfrak{q}$ であり $\operatorname{ht}(b_1, \ldots, b_{d-1}) = d-1$ となる。従って, (イ)は明らかで, (S_{d-2}) だから(ロ)もよい。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ をとる。$\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}$ な

らば$A_{\mathfrak{p}}$はCohen-Macaulayだから $H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A_{\mathfrak{p}})=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ である。$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$ ならば $(b_1,\dots,b_{d-1})A_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ であるから [9, (7.6)(1)$\Leftrightarrow$(2)]により $b_1,\dots,b_{d-1}$ は u.s. d-列 on $A_{\mathfrak{p}}$ である。従って $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}\cdot H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A_{\mathfrak{p}})=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ ([9, (3.4)])。故に $\ell(\mathfrak{q}\cdot H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A))<\infty$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ 。 $H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A)\cong(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}}):b_{d-1}^{t_{d-1}}/(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}})\subset A/(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}})$で depth $A=d-1$ であるから, $\mathfrak{q}\cdot H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A)\subseteq H^0_{\mathfrak{m}}(A/(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}}))=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ となる。従って [9,(3.4)]により, $b_1,\dots,b_{d-1}$ は u.s. d-列 on A である。 Q.E.D.

$R=\mathcal{R}(A,\mathfrak{q}^{d-2})=\bigoplus_{i\geq 0}(\mathfrak{q}^{d-2})^i$, $N=\mathfrak{m}R+R_+$ とおく。

(3.8) Theorem. depth $A=d-1$ かつ depth $K_A=3$ ならば, $i\neq d+1$ に対し $H_N^i(R)$は有限生成である。

Proof. $A/\mathfrak{m}$の代数的閉包を$\bar{k}$とする。[10, 0(10.3.1)]によりA上平坦な局所環$\bar{A}$で$\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A}\cong\bar{k}$となるものが存在する。[12, (3·3)]により$\bar{A}$はdualizing complexを持ち $A\to\bar{A}$ はGorenstein射である。従って, $\bar{A}$も(ア),(カ),(サ),(タ)を満たし, depth $\bar{A}=d-1$, depth $K_{\bar{A}}=3$ である。($K_{\bar{A}}\cong K_A\otimes_A\bar{A}$. cf. [2, 4.1]) また, $\bar{A}$における$\mathfrak{a}$として$\mathfrak{a}\bar{A}$がとれる。$a_1,\dots,a_{d-1}$は$\bar{A}$において(イ),(ロ),(ハ)を満たす。$\bar{R}=\mathcal{R}(\bar{A},(\mathfrak{q}\bar{A})^{d-2})\cong R\otimes_A\bar{A}$は$R$上忠実平坦であるから, $\bar{R}$に対し主張

を示せばよい。従って，$A/\mathfrak{m}$ は代数閉体としてよい。R は dualizing complex を持ち $\dim R/\mathfrak{p} = d+1$ for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ であるから，任意の斉次素 ideal $P \neq N$ に対し R_P が Cohen-Macaulay であることを示せばよい。$P \cap A = \mathfrak{p}$ とおく。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ のとき。$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ ならば $R_\mathfrak{p} \cong \mathcal{R}(A_\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^{d-2}A_\mathfrak{p})$ で，これは $a_1,\dots,a_{d-1}$ のとり方より Cohen-Macaulay である。(cf. (2.2)) $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}$ ならば $R_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}[T]$ で $A_\mathfrak{p}$ が Cohen-Macaulay だから，よい。$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ とする。$P \not\supseteq R_+$ である。$(\mathfrak{q}^{d-2})^{d-2} = (a_1^{d-2},\dots,a_{d-1}^{d-2})(\mathfrak{q}^{d-2})^{d-3}$ だから $\sqrt{R_+} = \sqrt{(a_1^{d-2}T,\dots,a_{d-1}^{d-2}T)}$ であり，$P \not\ni a_i^{d-2}T$ for some i となる。$P \not\ni a_1^{d-2}T$ としてよい。$t = a_1^{d-2}T$，$\tilde{R} = R[1/t]$，$B = \tilde{R}_0$，$\tilde{P} = P\tilde{R}$，$Q = \tilde{P} \cap B$ とおく。$Q \supseteq \mathfrak{m}B$ である。$\tilde{R} = B[t, 1/t]$ で，t は B 上代数的独立である。よって，B_Q Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ $\tilde{R}_{\tilde{P}}$ Cohen-Macaulay，であるから，B の極大 ideal $M \supseteq \mathfrak{m}B$ に対し B_M が Cohen-Macaulay であることを言えばよい。$B = \tilde{R}_0 = A[x/a_1^{d-2} \mid x \in \mathfrak{q}^{d-2}] = A[x/a_1 \mid x \in \mathfrak{q}] = A[a_2/a_1,\dots,a_{d-1}/a_1] \subseteq A[1/a_1]$。$A/\mathfrak{m}$ が代数閉体であるから $M = \mathfrak{m}B + (a_2/a_1 - c_2,\dots,a_{d-1}/a_1 - c_{d-1})B$ for some $c_2,\dots,c_{d-1} \in A$ となる。$b_1 = a_1$, $b_i = a_i - c_i a_1$ $(i=2,\dots,d-1)$ とおけば，(3.7) より $b_1,\dots,b_{d-1}$ は (イ),(ロ),(ハ) を満たす。$f \in B$，$b_{i+1}/b_1 \cdot f = b_1 f_1 + b_2/b_1 \cdot f_2 + \cdots + b_i/b_1 \cdot f_i$ $(f_1,\dots,f_i \in B)$ とする。$f = x/b_1^n$，$f_i = x_i/b_1^n$ ($x, x_i \in \mathfrak{q}^n$，$n$ は十分大) と書ける。b_1 は regular だから $b_{i+1}x = b_1^2 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_i x_i$ in A。故に $x_1 \in ((b_2,\dots,b_{i+1}) : b_1^2) \cap \mathfrak{q}^n = (b_2,\dots,b_{i+1})\mathfrak{q}^{n-1}$ ([9, (1.2) and (1.3)]) となり，$x_1 = b_2 y_2 + \cdots + b_{i+1} y_{i+1}$，$y_j \in \mathfrak{q}^{n-1}$ と書ける。故に $b_{i+1}(x - b_1^2 y_{i+1}) = b_2(x_2 +$

$b_1^2y_2)+\cdots+b_i(x_i+b_1^2y_i)$ で $x-b_1^2y_{i+1}\in((b_2,\ldots,b_i):b_{i+1})\cap\mathfrak{q}^n=(b_2,\ldots,b_i)\mathfrak{q}^{n-1}$ ([9,(1.3)]) となり，$x=b_1^2y_{i+1}+b_2z_2+\cdots+b_iz_i$, $z_j\in\mathfrak{q}^{n-1}$ と書ける。従って $f=x/b_1^n=b_1\cdot y_{i+1}/b_1^{n-1}+b_2/b_1\cdot z_2/b_1^{n-1}+\cdots+b_i/b_1\cdot z_i/b_1^{n-1}$ となり，$b_1, b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1$ は B-正則列である。次に $B/(b_1,b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1)B\cong A/(b_1)+U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})$ を示そう。$A\to B/(b_1,b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1)B$ が全射であることは明らかだから，$(b_1,b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1)B\cap A=(b_1)+U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})$ を示せばよい。$x\in U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})$ をとる。(3.4)(1) より $b_1x=b_2x_2+\cdots+b_{d-1}x_{d-1}$ と書ける。よって $x=b_2/b_1\cdot x_2+\cdots+b_{d-1}/b_1\cdot x_{d-1}$ で $(b_1)+U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})\subseteq(b_1,b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1)B$ が判る。$f\in(b_1,b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1)B\cap A$ をとる。$f=b_1f_1+b_2/b_1\cdot f_2+\cdots+b_{d-1}/b_1\cdot f_{d-1}$, $f_i=x_i/b_1^n$ ($x_i\in\mathfrak{q}^n$, n は十分大) と書ける。b_1 は regular だから $b_1^{n+1}f=b_1^2x_1+b_2x_2+\cdots+b_{d-1}x_{d-1}$ in A。$\mathfrak{q}^n=(b_1^n)+(b_2,\ldots,b_{d-1})\mathfrak{q}^{n-1}$ だから $x_1=b_1^ny_1+b_2y_2+\cdots+b_{d-1}y_{d-1}$ ($y_2,\ldots,y_{d-1}\in\mathfrak{q}^{n-1}$) と書ける。故に $b_1^{n+1}f=b_1^{n+2}y_1+b_2(x_2+b_1^2y_2)+\cdots+b_{d-1}(x_{d-1}+b_1^2y_{d-1})$ で $f-b_1y_1\in(b_2,\ldots,b_{d-1}):b_1^{n+1}=(b_2,\ldots,b_{d-1}):b_1=U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})$ ([9,(1.2)], (3.4)(1)) となり，$(b_1,b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1)B\cap A\subseteq(b_1)+U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})$ が判る。(3.5) より $A/U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})$ は Cohen-Macaulay であり，$A/(b_1)+U_A(b_2,\ldots,b_{d-1})$ もそうである。従って $B/(b_1,b_2/b_1,\ldots,b_{d-1}/b_1)B$ が Cohen-Macaulay であり，B_M もそうである。　Q.E.D.

(3.9) Remark. 上の Proof 中の議論は，[8] にあるものと全く同様である。

(3.10) Theorem. A の dualizing complex が存在するとする。A が (S_{d-2}) で，depth $A \geqq d-1$，depth $K_A \geqq 3$ ならば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. $d \geqq 5$, depth $A = d-1$ としてよい。このとき，depth $K_A \geqq 3$ だから A は FLC でない (cf. [1, Lemma 1])。従って，A は (ア), (カ), (サ), (タ) を満たす。(3.3) の直後でとった $a_1, \ldots, a_{d-1}$，及び (3.8) の直前での R, N を考える。(3.8) により R_N は dualizing complex を持つ FLC な局所環である。従って (1.1) により，R_N は Gorenstein 環の準同型像である。A は R_N の準同型像であるから，主張を得る。　Q.E.D.

(3.11) Remark. (1)　$d \geqq 6$ で，A が (S_{d-2}) で，A の dualizing complex が存在するとする。このとき，A が quasi-Gorenstein (i.e. $K_A \cong A$) ならば，A は Gorenstein である。

(2)　$d = 5$ で，A が (S_3) で，A の dualizing complex が存在するとする。このとき，A が quasi-Gorenstein ならば，A は FLC で，従って Gorenstein 環の準同型像である。なお，A 自身が Gorenstein であるとは限らない。

Proof. (1)　$\hat{A}$ が Cohen-Macaulay であることを言えばよい。(従

って，dualizing complexの存在の代わりにformal fibreが(S_{d-2})を仮定すればよい。) $A=\hat{A}$, A non-Cohen-Macaulayとする。(3.1)のProofより $\dim \mathrm{Hom}_A(H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A), E(A/\mathfrak{m})) \leqq 1$ だから，$\mathrm{depth}\, K_A \leqq 3$。(cf. [1, Lemma1])。一方，$K_A \cong A$ だから $\mathrm{depth}\, K_A \geqq d-2 \geqq 4$。矛盾。

(2) FLCでないとする。今の場合，FLC $\Leftrightarrow$ $A_{\mathfrak{p}}$ Cohen-Macaulay for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\setminus\{\mathfrak{m}\}$で，Aが$(S_3)$だから，$\dim A_{\mathfrak{p}}=4$, $\mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{p}}=3$となる素ideal $\mathfrak{p}$が存在する。$A_{\mathfrak{p}}$は(S_3)だからFLCで $\mathrm{depth}\, K_A=2$となる([1, Lemma1])。ところが $K_{A_{\mathfrak{p}}} \cong A_{\mathfrak{p}}$ だから，矛盾。故にFLCである。(ここまでは，(1)のProofの括弧内と同様でよい。) 従って(1.1)によりAはGorenstein環の準同型像である。[7, 1.1]より5次元Buchsbaum完備局所環$(B, \mathfrak{n})$で $H^3_{\mathfrak{n}}(B)\neq 0$, $H^i_{\mathfrak{n}}(B)=0$ for $i\neq 3, 5$となるものがある。$A=B\ltimes K_B$ (idealization)とすれば，Aは仮定を満たす(cf. [2, 11])が，Gorensteinでない。　　Q.E.D.

(3.12) Remark.　$n\geqq 5$, $n-2\leqq s<n$, $2\leqq t\leqq 3$ なる任意の整数n, s, tに対し，次を満たす局所環Bが存在する：$\dim B=n$, $\mathrm{depth}\, B=s$, (S_{n-2}), non-FLC, dualizing complexが存在，$\mathrm{depth}\, K_B=t$.

なお，$(s, t)\neq(n-1, 3)$のときには，(3.8)の結果は成立しないようである。

文　献

[1] Y. Aoyama : *On the depth and the projective dimension of the canonical module*, Japan. J. Math., 6 (1980), 61〜66.

[2] Y. Aoyama : *Some basic results on canonical modules*, J. Math. Kyoto Univ., 23 (1983), 85〜94.

[3] Y. Aoyama and S. Goto : *On the endomorphism ring of the canonical module*, Preprint.

[4] G. Faltings : *Zur Existenz dualisierender Komplexe*, Math. Z., 162 (1978), 75〜86.

[5] D. Ferrand and M. Raynaud : *Fibres formelles d'un anneau local noethérien*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. (4), 3 (1970), 295〜311.

[6] R. Fossum, H.-B. Foxby, P. Griffith and I. Reiten : *Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein modules*, Publ. Math. I. H. E. S., 45 (1975), 193〜213.

[7] S. Goto : *On Buchsbaum rings*, J. Algebra, 67 (1980), 272〜279.

[8] S. Goto : *Blowing-up of Buchsbaum rings*, Commutative Algebra : Durham 1981, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 72, Camb. Univ. Press, 140〜162.

[9] S. Goto and K. Yamagishi : *The theory of unconditioned strong d-sequences with applications to modules having finite local cohomology*, Preprint.

[10] A. Grothendieck : *Éléments de géométrie algèbrique*, III (*première partie*), Publ. Math. I. H. E. S., 11 (1961).

[11] J. E. Hall : *Fundamental dualizing complexes for commutative noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxford (2), 30 (1979), 21 ~ 32.

[12] J. E. Hall and R. Y. Sharp : *Dualizing complexes and flat homomorphisms of commutative noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 84 (1978), 37 ~ 45.

[13] R. Hartshorne : *Residues and duality*, Lect. Notes Math. 20, Springer Verlag, 1966.

[14] J. Herzog, E. Kunz et al. : *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lect. Notes Math. 238, Springer Verlag, 1971.

[15] T. Ogoma : *Existence of dualizing complexes*, J. Math. Kyoto Univ., 24 (1984), 27 ~ 48.

[16] R. Y. Sharp : *Dualizing complexes for commutative noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 78 (1975), 369 ~ 386.

[17] R. Y. Sharp : *A commutative noetherian ring which possesses a dualizing complex is acceptable*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82 (1977), 197 ~ 213.

[18] R. Y. Sharp : *Necessary conditions for the existence of dualizing complexes in commutative algebra*, Sém. Algèbre P. Dubreil 1977/8, Lect. Notes Math. 740, 213 ~ 229, Springer Verlag, 1979.

[19] N. Suzuki : *Canonical duality for Buchsbaum modules*, Bull. Dept. Gen. Educ. Shizuoka Coll. Pharmacy, 13 (1984), 47 ~ 60.

'84.9 下旬

'84.10 下旬. 修正

追補.　その後, $d=3$ のときに canonical module の存在について判明したことがあるので, それを記しておきたい。

(A.1) Lemma.　A の canonical module が存在するとする。$\mathfrak{a}$ が高さ $d-1$ $(d \geq 1)$ の ideal であれば, $A/\mathfrak{a}$ は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof.　P を $\hat{A}$ の素 ideal $\neq \mathfrak{m}\hat{A}$ で $\mathfrak{a}\hat{A}$ を含むものとし, $\mathfrak{p} = P \cap A$ とおく。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}, \supseteq \mathfrak{a}$ で $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = d-1$ であるから $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(K_A)$ である。(cf. [2, (1.9)])　よって (1.8) の Proof 中の $\dim A/\mathfrak{a} = 1$ の場合の議論と同様にして主張を得る。　Q.E.D.

Faltings による定理が必要なので, それを述べておく。但し, ここで必要なのは, I が巾零の場合だけである。

(A.2) Lemma ([4, Satz 2]).　R を環, I をその ideal とし, R が I-進位相で完備だとする。このとき, R/I の dualizing complex が存在すれば, R の dualizing complex も存在する。

(A.3) Proposition.　$d=3$ のとき, A の canonical module が存在し, A が equidimensional であるならば, A は Gorenstein 環の準同

型像である。

Proof. (2.3)よりAのdualizing complexが存在することを言えばよい。そのためには(A.2)により $A/\sqrt{(0)}$ のdualizing complexが存在することを示せばよい。仮定により $\sqrt{(0)}=\sqrt{U}$ であるから，A/U のdualizing complexが存在することを言えばよい。$\dim A/U=d$ だから A/U のcanonical moduleが存在する。($K_{A/U}\cong K_A$ である. cf. [2, (1.8)]) 従って $U=0$ としてよい。Aが(S_2)なら(1.3)によりよい。(S_2)でないとしよう。$H=\mathrm{End}_A(K_A)$ とおく。[2, 3.2]により，H はAを含む有限生成A-加群なる3次元半局所環で，すべての極大素ideal鎖は長さ3で，K_Aは(H-加群とみて)Hのcanonical module (i.e. $\forall \mathfrak{P}\in \mathrm{Spec}(H)$, $(K_A)_{\mathfrak{P}}$ は $H_{\mathfrak{P}}$ のcanonical module)で，H は(S_2)である。従って(1.1)のProof of (c)⇒(b)と同様の方法で，H のdualizing complex $I^{\cdot}$ で $I^i=\bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{P}=i} E_H(H/\mathfrak{P})$ なるものが存在することが判る。$\mathfrak{c}=\{a\in A \mid aH\subseteq A\}$ とおく。Aは(S_2)でないから [2, Proof of 4.2] により $\mathrm{ht}\,\mathfrak{c}=2$ である。(A.1)より $A/\mathfrak{c}$ はfundamental dualizing complex $J^{\cdot}$ ($J^i=0$ for $i\neq 2,3$)を持つ。$\mathrm{Hom}_H(H/\mathfrak{c}, I^{\cdot})$ と $\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{c}}(H/\mathfrak{c}, J^{\cdot})$ は共に $H/\mathfrak{c}$ のfundamental dualizing complexである。(2.3)のProof中の議論と同様にして，$\mathrm{Hom}_H(H/\mathfrak{c}, I^{\cdot})\cong \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{c}}(H/\mathfrak{c}, J^{\cdot})$ as complexesが判る。$A\cong H\times_{H/\mathfrak{c}} A/\mathfrak{c}$ である(cf. [15, 3.2])から，(1.6)によりAのdualizing complexが存在する。

Q.E.D.

(A.4) Corollary. $d=3$ のとき，次は同値である：

(a) A の canonical module が存在する。

(b) A/U は Gorenstein 環の準同型像である。 (cf. [2, (1.12)])

(A.5) Proposition. $d=3$ のとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である。

(b) A の dualizing complex が存在する。

(c) 任意の ideal $\mathfrak{a}$ $(\neq A)$ に対し，$A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在する。

Proof. (c) ⇒ (b) を示せばよい。(cf. (2.3)) $A \supset (0) = U \cap I$ (準素分解より) とする。(A.4) により A/U の dualizing complex が存在する。$\dim A/I \leqq 2$ で，A/I の任意の剰余類環は canonical module を持つから，A/I の dualizing complex が存在する。(cf. (1.7)(d) ⇒ (b), (1.5)) $A \cong A/U \times_{A/U+I} A/I$ だから (1.6) により主張を得る。 Q.E.D.

(A.6) Remark. (1) [15, Example 2] により，4次元 (S_2) 局所整域で，任意の剰余類環は canonical module を持つが，dualizing complex は存在しない，ものがある。

(2) 2次元局所整域で，formal fibre はすべて Gorenstein であるが，canonical module は存在しない，ものがある。(cf. M. Nagata

Local Rings Example 2) 従ってまた，3次元局所環で，canonical module が存在し，formal fibre も Gorenstein であるが，dualizing complex は存在しない，ものがある。

'84.11.12. 追補

English Summary

A ring will mean a commutative noetherian ring with unit. We consider a conjecture of Sharp on the existence of dualizing complexes. For the definition of dualizing complexes, we refer the reader to [16,(2.4)] and [18]. A ring of finite dimension which is a homomorphic image of a Gorenstein ring has a dualizing complex and a Cohen-Macaulay ring with dualizing complex is a homomorphic image of a Gorenstein ring. (cf. [18])
Sharp conjectured the following

(SC)([18,(4.4)]). A ring with dualizing complex is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

In this note we treat the local ring case. In the remainder A denotes a d-dimensional local ring with maximal ideal m and $\hat{}$ denotes the completion. For the notion of the canonical module, we refer the reader to [14] and [2]. We have the implications:
A is a homomorphic image of a Gorenstein ring $\Rightarrow$ A has a

dualizing complex $\Rightarrow$ A has the canonical module .

Our main results are the following.

THEOREM. Assume that $H^i_m(A)$ is of finite length for $i \neq d$.
Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) A has the canonical module.

PROPOSITION. Let $d = 1$. Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) A has the canonical module.

(d) The natural map $A \to \hat{A}$ is a Gorenstein homomorphism.

PROPOSITION. Let $d = 2$. Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) A has the canonical module and the natural map $A \to \hat{A}$ is a Gorenstein homomorphism.

(d) Every factor ring of A has the canonical module.

THEOREM. If $d \leq 4$ and A has a dualizing complex, then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

THEOREM. If A has a dualizing complex, A is (S_{d-2}), depth A $\geq d - 1$ and depth $K \geq 3$ (K is the canonical module of A), then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

PROPOSITION. If $d \leq 3$, A has the canonical module and A is equidimensional, then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring

COROLLARY. Let $d \leq 3$. Then A has the canonical module if and only if $A/U_A(0)$ is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

PROPOSITION. Let $d = 3$. Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) Every factor ring of A has the canonical module.

REMARKS. (1) There exists a one-dimensional local domain which does not have the canonical module. ([5])

(2) There exists a two-dimensional local ring which has the canonical module but does not have a dualizing complex. (cf.(1))

(3) There exists a two-dimensional local domain B such that every formal fibre of B is Gorenstein but B does not have the canonical module. (Nagata, Local Rings, Example 2)

(4) There exists a three-dimensional local ring B such that B has the canonical module and every formal fibre of B is Gorenstein but B does not have a dualizing complex. (cf.(3))

(5) There exists a four-dimensional local domain B such that every factor ring of B has the canonical module but B does not have a dualizing complex. ([15, Example 2])